



Частное образовательное учреждение
профессионального образования
«Западно-Уральский горный техникум»

ОП.11 МАТЕМАТИКА

Методические указания для самостоятельной работы студентов
заочной формы обучения специальности

(базовая подготовка)

Пермь 2025

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями Федеральных государственных образовательных стандартов (далее – ФГОС) для среднего профессионального образования (далее – СПО).

Организация-разработчик: ЧОУ ПО «Западно-Уральский горный техникум»
(ЧОУ ПО «ЗУГТ»)

Составитель: Мальцева Элла Леонидовна - преподаватель ЧОУ ПО «ЗУГТ»

Методические указания рассмотрены методическим советом
ЧОУ ПО «ЗУГТ»
Протокол № 1 от 24 января 2025 г.

Методические указания содержат теоретический материал по дисциплине, содержание практических занятий, задания для самостоятельной работы студентов и методического указания по выполнению контрольных работ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уровень подготовки специалистов - базовый, дисциплина относится к математическим и общим естественнонаучным циклам (ЕН.01) в структуре программы подготовки специалистов среднего звена.

Заочная форма обучения предусматривает самостоятельное изучение дисциплины по методическим указаниям, рекомендованной литературе, выполнение контрольной работы, предусматривающей задания теоретического и практического характера.

Важно, чтобы кроме рекомендованной литературы, студент использовал вновь издаваемые учебные пособия по проблемам математической теории, Интернет ресурсы.

В процессе работы над курсом рекомендуется вести конспект, выписывать определения понятий, отрабатывать вопросы самоконтроля, решать предложенные задачи.

В соответствии с ФГОС СПО в результате изучения дисциплины **студент должен:**

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

знать:

значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ; основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления.

Целью изучения ОП.11 Математика является усвоение обучающимся теоретических знаний и приобретение умений в области математики, а также формирование **общих (ОК) (частично) компетенций**:

Код	Наименование результата обучения
ОК 1.	Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
ОК 2.	Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество
ОК 3.	Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4.	Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
ОК 5.	Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК 7.	Брать на себя ответственность за работу членов команды, за результат выполнения заданий
ОК 8.	Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
ОК 9.	Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

профессиональных (ПК) (частично) компетенций:

ПК 1.1. Выполнять наладку, регулировку и проверку электрического и электромеханического оборудования.

ПК 1.2. Организовывать и выполнять техническое обслуживание и ремонт электрического и электромеханического оборудования.

ПК 1.3. Осуществлять диагностику и технический контроль при эксплуатации электрического и электромеханического оборудования.

ПК 1.4. Составлять отчетную документацию по техническому обслуживанию и ремонту электрического и электромеханического оборудования.

ПК 2.1. Организовывать и выполнять работы по эксплуатации, обслуживанию и ремонту бытовой техники.

ПК 2.2. Осуществлять диагностику и контроль технического состояния бытовой техники.

ПК 2.3. Прогнозировать отказы, определять ресурсы, обнаруживать дефекты электробытовой техники.

ПК 3.1. Участвовать в планировании работы персонала производственного подразделения.

Студенты заочной формы обучения выполняют домашнюю контрольную работу в соответствии с методическими указаниями для студентов-заочников.

Самостоятельная работа студентов-заочников заключается в изучении литературы, список которой указан в методических указаниях, ответов (устных ответов) на вопросы для самоконтроля, расположенных в методических указаниях, и выполнения контрольной работы по своему варианту.

Формой итогового контроля по дисциплине является экзамен. До экзамена допускаются студенты, имеющие зачетную домашнюю контрольную работу.

Количество часов на освоение программы дисциплины:

максимальной учебной нагрузки обучающегося - 72 часа, в том числе:
обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося - 14 часов;
самостоятельной работы обучающегося - 58 часов.

Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

	1 семестр	2 семестр
Аудиторные занятия	10	4
Контрольная работа		+
Экзамен		+
Самостоятельная работа	58	
Общая трудоёмкость	64	

2. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Для заочной формы обучения

Наименование разделов и тем	Макс. нагрузка на студента (час.)	Количество аудиторных часов при заочной форме обучения			СРС
		Всего	Лабор. работа	Практ. работа	
Введение	4	2			2
Раздел 1. Основные понятия и методы математического анализа	22	4		2	18
Раздел 2. Основные понятия и методы линейной алгебры	12	2		2	10
Раздел 3. Основные понятия теории комплексных чисел	17	3		3	14
Раздел 4. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики	17	3		3	14
Всего по дисциплине	72	14		10	64

3. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

История возникновения, развития и становления математики как основополагающей дисциплины, необходимой для изучения профессиональных дисциплин. Цель, задачи математики. Связь математики с общепрофессиональными и специальными дисциплинами.

Раздел 1. Основные понятия и методы математического анализа

Тема 1.1. Основы интегрального и дифференциального исчисления

Функции одной независимой переменной. Пределы. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функций. Производная, геометрический смысл. Исследование функций

Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной. Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла. Приложения интеграла к решению прикладных задач. Функции нескольких переменных. Частные производные.

Методические указания

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Многие задачи как самой математики, так и естествознания и техники приводят к этому понятию.

Перед тем как записать понятие производной рекомендуется рассмотреть физическую задачу о неравномерном движении и его скорости, которая приводит к понятию производной.

ПРОИЗВОДНАЯ

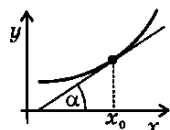
Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, если этот предел существует:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

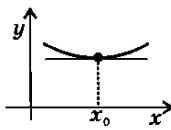
Пример: $(x^2)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

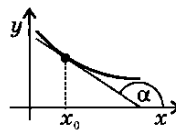
Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке:



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t),$$

а ускорение:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t).$$

Пример. При свободном падении $x(t) = \frac{gt^2}{2}$, $v(t) = x'(t) = gt$,

$$a(t) = v'(t) = g.$$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Если у функций $u(x)$ и $v(x)$ существуют производные, то

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(cu)' = cu', \text{ где } c — \text{const}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция	Производная
$f(x) = c$	$c' = 0$, где c — const
$f(x) = x^a$	$(x^a)' = ax^{a-1}$
$f(x) = e^x$	$(e^x)' = e^x$
$f(x) = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$f(x) = \ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arcctg} x$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Если $y = f(g(x))$ и существуют производные f'_g и g'_x , то

$$y'_x = f'_g \cdot g'_x,$$

где индексы g и x указывают, по какому аргументу вычисляются производные.

Примеры: 1. $(\sqrt{\sin x})' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \quad (\sin x > 0)$

2. $(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \quad (\sin x > 0)$

3. $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1) \quad (x > 0)$

Каждому математическому действию соответствует обратное ему действие. Для дифференцирования существует обратное действие — интегрирование. Нужно разобраться в определении первообразной для функции $f(x)$, понять неоднозначность нахождения первообразной, а затем следует изучить определение неопределенного интеграла, основные свойства неопределенного интеграла.

ПЕРВООБРАЗНАЯ

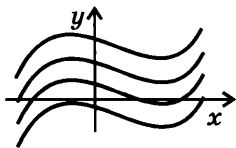
Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Пример. Первообразной для функции $f(x) = x$ на всей числовой оси является $F(x) = x^2/2$, поскольку $(x^2/2)' = x$.

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



Графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси y .

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$ называется ее **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ где } C — \text{произвольная постоянная.}$$

Зная формулы дифференцирования, студент легко сможет выписать в таблицу основные интегралы. Эти интегралы называются табличными интегралами.

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx, \text{ где } c — \text{const}$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a \neq 0$$

Из способов интегрирования рекомендуется изучить лишь непосредственное интегрирование (приведение к одному или нескольким табличным интегралам) и метод подстановки (замены переменной). В рекомендуемой литературе приводится схема интегрирования методом подстановки и множество решенных примеров на нахождение интегралов по данному методу. Все это позволит студенту понять сущность интегрирования методом подстановки.

После серьезной работы над темой "Неопределенный интеграл" студенту не составит огромного труда изучить такие вопросы как:

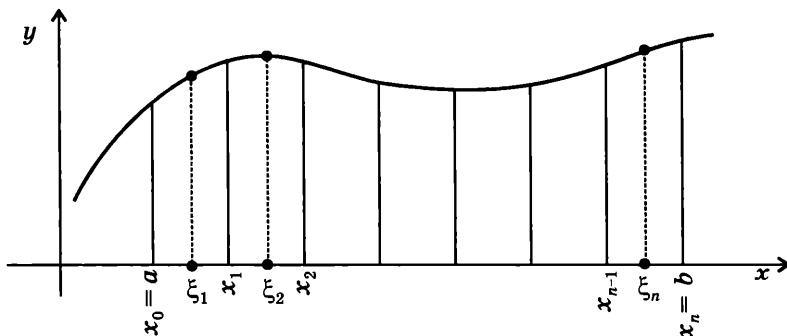
- определение определенного интеграла;
- основные свойства определенного интеграла (предлагается пять свойств, среди них два свойства аналогичны свойствам неопределенного интеграла);
- методы вычисления определенного интеграла

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x$ при $n \rightarrow \infty$,

где $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x, \text{ где } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ (см. рисунок)}$$



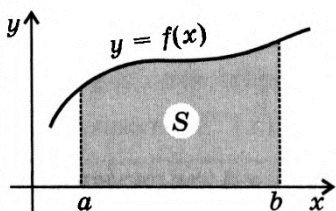
**СВЯЗЬ МЕЖДУ ОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ И ПЕРВООБРАЗНОЙ
(ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА)**

Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

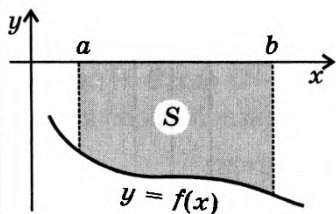
где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА



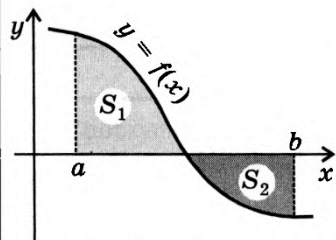
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке $[a; b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x = a$ и $x = b$:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке $[a; b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x = a$ и $x = b$:

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



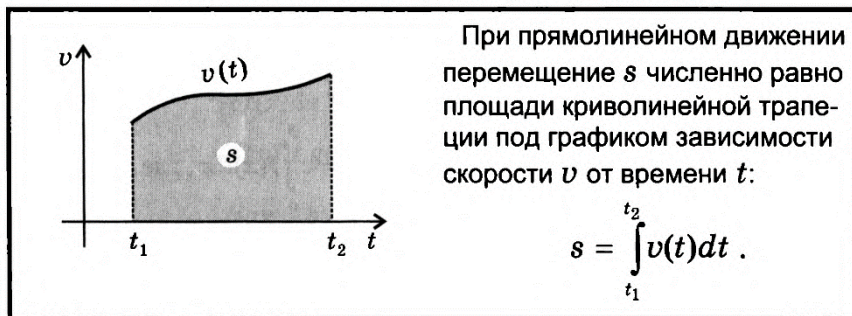
Замечание. Если функция изменяет знак на промежутке $[a; b]$, то

$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx$$

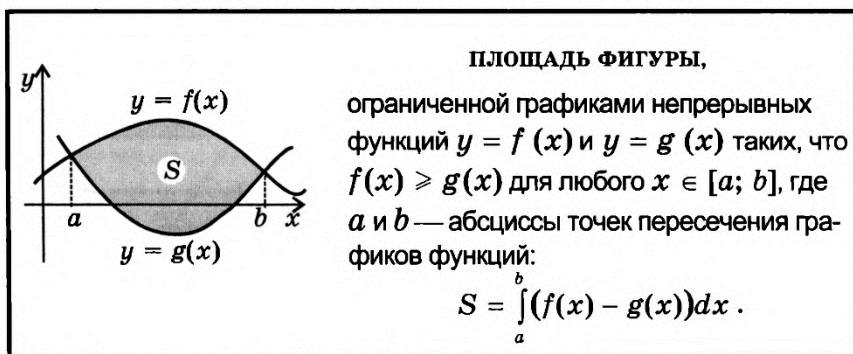
Определенный интеграл широко применяется для вычисления различных геометрических и физических величин. Следует разобраться в следующих приложениях определенного интеграла:

- вычисление площади плоских фигур (геометрический смысл определенного интеграла);
- нахождение объема тела вращения;
- вычисление пути, пройденного точкой и скорости тела;
- вычисление работы силы.

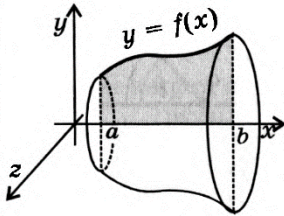
ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА



ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА



ОБЪЕМ ТЕЛА,



полученного в результате вращения вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение производной функции.
2. Напишите все формулы дифференцирования.
3. Дайте определение сложной функции. Как найти ее производную?
4. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$?
5. Дайте определение неопределенного интеграла.
6. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
7. Каким действием можно проверить интегрирование?
8. Напишите основные формулы интегрирования (табличные интегралы).
9. Дайте определение определенного интеграла.
10. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
11. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
12. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Раздел 2. Основные понятия и методы линейной алгебры

Тема 2.1. Матрицы, операции над ними

Матрицы. Виды матриц. Элементарные преобразования матриц. Сложение матриц, умножение матрицы на число, произведение матриц.

Практические занятия. *Элементарные преобразования матриц. Действия над матрицами.*

Методические указания

Матрицы (и соответственно математический раздел - матричная алгебра) имеют важное значение в прикладной математике, так как позволяют записать в достаточно простой форме значительную часть математических моделей объектов и процессов. Термин "матрица" появился в 1850 году. Впервые упоминались матрицы еще в древнем Китае, позднее у арабских математиков.

Матрицей A размера $m \times n$ называется таблица из m, n чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа, из которых состоит матрица, называются элементами матрицы. Индексы у элементов матрицы указывают на расположение этого элемента в таблице: первый индекс – номер строки, в которой находится элемент, а второй – номер столбца.

Например, элемент a_{23} находится на пересечении второй строки и третьего столбца:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы a_{ij} , у которых $i=j$, называются диагональными и образуют главную диагональ.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots \\ \dots & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Если матрица A имеет размер $n \times n$, то такую матрицу называют квадратной матрицей порядка n

Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется нулевой.

Равенство матриц.

$A=B$, если порядки матриц A и B одинаковы и $a_{ij} = b_{ij}$ ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$)

Действия над матрицами

1. Сложение матриц

Суммой двух матриц одинакового размера $m \times n$... $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ называют матрицу $C = \|c_{ij}\|$ размера $m \times n$ такую, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+3 \\ 3+1 & -1-3 \\ 4+0 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Свойства сложения

1. $A + B = B + A$ (коммутативность),
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность),
3. $A + 0 = A$.

2. Произведение матрицы на число

Произведением матрицы размера $m \times n$ $A = \|a_{ij}\|$ на число λ называют матрицу того же размера $C = \|c_{ij}\|$ такую, что

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = -3A$.

Решение: используя определения умножения матрицы на число найдем элементы новой матрицы и запишем ее.

$$c_{11} = -3a_{11} = -3 \cdot 1 = -3; \quad c_{12} = -3a_{12} = -3 \cdot 7 = -21;$$

$$c_{13} = -3a_{13} = -3(-3) = 9;$$

$$c_{21} = -3a_{21} = -3 \cdot 2 = -6; \quad c_{22} = -3a_{22} = -3 \cdot 4 = -12;$$

$$c_{23} = -3a_{23} = -3 \cdot 6 = -18.$$

Таким образом,

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -21 & 9 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матрицы на число

$$1. \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$2. (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,$$

$$3. (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A).$$

3. Произведение матриц

Умножение матрицы $A = \|a_{ij}\|$ размера $m \times n$ на матрицу $B = \|b_{ij}\|$ размера $l \times k$ определено лишь для случая, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B , т.е. когда $n = l$.

Произведением матриц AB называется матрица $C = \|c_{ij}\|$ размера $m \times k$, у которой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, k.$$

Иначе говоря, элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -той строки матрицы A на соответствующий элемент j -го столбца матрицы B .

Пример 1:

Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 \\ -1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & -1 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 & -1 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 8 \\ 10 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Пример 2:

Можно ли умножить матрицу $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ на матрицу $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$?

$$KL = \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}^{n=2 \text{ столбца}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{n=2 \text{ строки}}$$

$m = n$, значит, умножить данные матрицы можно.

А вот если матрицы переставить местами, то, в данном случае, умножение уже невозможно!

$$LK = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}^{n=1 \text{ столбец}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}_{n=2 \text{ строки}}$$

$m \neq n$, следовательно, выполнить умножение невозможно:


$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц не коммутативно. Убедимся в этом:

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ -2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

4. Возведение в степень

Определяется на основе определения степени и умножения матриц.

$$A^m = \underbrace{A * A * \dots * A}_{m \text{ раз}}$$

$m > 1$ целое положительное число. A - квадратная матрица ($m=n$) т.е. актуально только для квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 19 \\ 45 & 30 & 27 \\ -1 & 4 & -13 \end{pmatrix}.$$

5. Транспонирование матрицы A .

Матрицей, транспонированной к матрице $A = \|a_{ij}\|$ размера $m \times n$, называется

матрица $A^T = \|b_{ji}\|$ размера $n \times m$, где $b_{ji} = a_{ij}$. Иными словами, чтобы из

исходной матрицы получить транспонированную, надо ее строки поставить в соответствующие столбцы.

Строки и столбцы поменялись местами

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Виды матриц

1. Прямоугольные: m и n - произвольные положительные целые числа
2. Квадратные: $m=n$
3. Матрица строка: $m=1$. Например, $(1 \ 3 \ 5 \ 7)$ - во многих практических задачах такая матрица называется вектором
4. Матрица столбец: $n=1$. Например
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$
5. Диагональная матрица: $m=n$ и $a_{ij}=0$, если $i \neq j$. Например

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Единичная матрица: $m=n$ и

$$E = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $\delta_{ij} = 0$ если $i \neq j$

$\delta_{ij} = 1$ если $i = j$

7. Нулевая матрица: $a_{ij}=0, i=1,2,\dots,m$

$j=1,2,\dots,n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Треугольная матрица: все элементы ниже главной диагонали равны 0.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Матрицы.
2. Виды матриц.
3. Элементарные преобразования матриц.
4. Сложение матриц
5. Умножение матрицы на число
6. Произведение матриц.

Тема 2.2. Определители матриц, их вычисление

Определители матриц, их свойства. Определители второго и третьего порядков. Определители n -го порядка. Их вычисление. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы

Практические занятия. *Вычисление определителей второго и третьего порядка*

Каждой **квадратной** матрице можно сопоставить некоторое число, называемое определителем матрицы.

Определителем матрицы 2-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1(-5) - (-3)2 = 1.$$

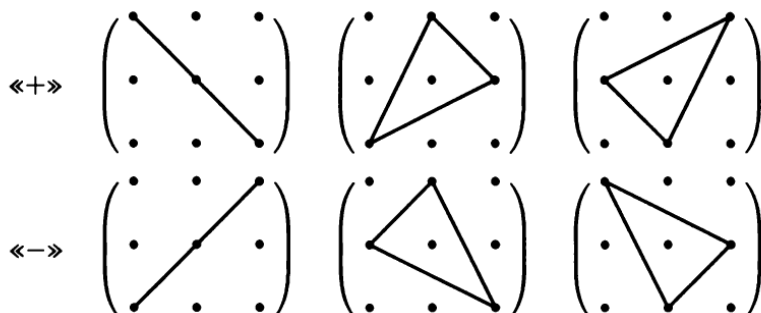
Определителем матрицы 3-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Методы вычисления определителей

1. **Правило «треугольников»** (правило Саррюса) вычисления определителей 3-го порядка: первое из трех слагаемых, входящих в сумму (2.1) со знаком «+», есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье — произведения элементов, находящихся в вершинах двух

треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму (2.1) со знаком «-», определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали:



⇒ Определитель 3-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ + (-a_{13}a_{22}a_{31}) + (-a_{12}a_{21}a_{33}) + (-a_{11}a_{23}a_{32}). \quad (2.1)$$

2. Разложение определителя 3-го порядка по первой строке:

$$|A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (2.2)$$

При таком способе вычисления определителя каждый из трех элементов a_{1j} первой строки умножается на определитель 2-го порядка, составленный из элементов матрицы A , оставшихся после вычеркивания 1-й строки и j -го столбца. При этом слагаемое с множителем a_{1j} умножается на число $(-1)^{1+j}$:

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что раскладывая определитель можно по любой строке или столбцу.

Минором элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.

Обозначение: a_{ij} – выбранный элемент определителя, M_{ij} – его минор.

Свойства определителей

1. Если у определителя какая-либо строка (столбец) состоит только из нулей, то определитель равен 0.

2. Если какие-либо две строки (два столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен 0.

3. Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на произвольное число, то и весь определитель умножится на это число.

4. Если две строки (два столбца) определителя поменять местами, то определитель изменит знак.

5. Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить какую-либо другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, то определитель не изменится.

Вопросы для самоконтроля:

1. Определители матриц, их свойства.
2. Определители второго и третьего порядков.
3. Определители n -го порядка.

Тема 2.3 Решение систем линейных уравнений

Системы линейных алгебраических уравнений. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера.

Практические занятия. Решение систем линейных уравнений методом Крамера. Решение систем линейных уравнений матричным методом. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Методические указания

Линейным уравнением называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

где a_i и b — числа, x_i — неизвестные.

Таким образом, в левой части линейного уравнения стоит линейная комбинация неизвестных, а в правой – число.

Линейное уравнение называется **однородным**, если $b = 0$. В противном случае уравнение называется **неоднородным**.

Системой линейных уравнений (линейной системой) называется система вида

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right., \quad (1)$$

где a_{ij} , b_i - числа, x_j - неизвестные, n - число неизвестных, m - число уравнений.

Решением линейной системы называется набор чисел

$x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$, которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

Линейная система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений.

Совместная линейная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Метод Гаусса

Пусть в системе (1) $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Разделим обе части первого уравнения на a_{11} и вычтем полученное уравнение из каждого из остальных уравнений системы, умножив его предварительно на a_{i1} , где i – номер очередного уравнения. Как известно, полученная при этом новая система будет равносильна исходной. Коэффициенты при x_1 во всех уравнениях этой системы, начиная со второго, будут равны 0, т.е. система выглядит так:

[illegible]

Если новые коэффициенты при x_2 не все равны нулю, можно таким же образом исключить x_2 из третьего и последующих уравнений.

Продолжая эту операцию для следующих неизвестных, приведем систему к так называемому треугольному виду:

[illegible]

Здесь символами $\tilde{a}_{ij}, \hat{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ и $\hat{b}_i$ обозначены изменившиеся в результате преобразований числовые коэффициенты и свободные члены.

Из последнего уравнения системы (2) единственным образом определяется x_n , а затем последовательной подстановкой – остальные неизвестные.

Правило Крамера

Рассмотрим линейную систему, в которой число уравнений равно

[illegible]

Назовем **главным определителем** такой системы определитель Δ , элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

а определителем Δ_{x_j} - определитель, полученный из (4) заменой столбца коэффициентов при x_j на столбец свободных членов. Тогда:

- 1) Если $\Delta \neq 0$, система (3) имеет единственное решение,

определяемое по формулам: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.

- 2) Если $\Delta = \Delta_{x_i} = 0$, система имеет бесконечно много решений.

- 3) Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_{x_i} \neq 0$, система не имеет решений.

Пример : Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

Найдем определитель матрицы системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

Так как $D \neq 0$, то решение системы существует и единственно.

Найдем определители D_1 , D_2 и D_3 подставляя столбец свобод-

ных членов $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ вместо первого, второго и третьего столбцов

определителя Δ соответственно:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = \\
 &= 6 \cdot (-48) - 2 \cdot 36 + 3 \cdot (72 + 30) = \\
 &\quad -288 - 72 + 306 = -360 + 306 = -54, \\
 D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = \\
 &= 1 \cdot 36 - 6 \cdot (-42) + 3 \cdot (-24 - 63) = 36 + 252 + 3 \cdot (-87) = \\
 &\quad = 288 - 261 = 27, \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \\
 &= 1 \cdot (-30 - 72) - 2 \cdot (-24 - 63) + 6 \cdot (32 - 35) = \\
 &= -102 - 2 \cdot (-87) + 6 \cdot (-3) = -102 + 174 - 18 = 54.
 \end{aligned}$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-54}{27} = -2,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{27}{27} = 1,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{54}{27} = 2.$$

Ответ. $(-2; 1; 2)$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Системы линейных алгебраических уравнений.
2. Решение невырожденных линейных систем.
3. Формулы Крамера.
4. Решение методом Гаусса

Раздел 3. Основные понятия теории комплексных чисел

Тема 3.1 Формы записи комплексных чисел

Комплексные числа. Формы записи и изображение комплексных чисел.

Практические занятия. *Изображение комплексных чисел.*

Методические указания

Алгебраическая форма записи комплексных чисел

Пусть x и y – произвольные вещественные числа.

Множеством комплексных чисел называют множество всевозможных пар (x, y) вещественных чисел, на котором определены операции сложения, вычитания и умножения по правилам, описанным чуть ниже.

Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел.

Для комплексных чисел существует несколько форм записи: алгебраическая форма записи, тригонометрическая форма записи и экспоненциальная (показательная) форма записи.

Алгебраическая форма – это такая форма записи комплексных чисел, при которой комплексное число z , записывается в виде $z = x + i y$. (1)

где использован символ i , называемый мнимой единицей.

Число x называют действительной (реальной) частью комплексного числа $z = x + i y$ и обозначают $\operatorname{Re} z$.

Число y называют мнимой частью комплексного числа $z = x + i y$ и обозначают $\operatorname{Im} z$.

Комплексные числа, у которых $\operatorname{Im} z = 0$, являются действительными числами.

Комплексные числа, у которых $\operatorname{Re} z = 0$, являются чисто мнимыми числами.

Тригонометрическая и экспоненциальная формы записи комплексных чисел мы использовать не будем.

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Сложение и вычитание комплексных чисел $z_1 = x_1 + i y_1$ и $z_2 = x_2 + i y_2$ осуществляется по правилам сложения и вычитания двучленов (многочленов) $x_1 + i y_1$ и $x_2 + i y_2$, т.е. в соответствии с формулами

$$z_1 + z_2 = x_1 + i y_1 + x_2 + i y_2 = x_1 + x_2 + i (y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = x_1 + i y_1 - (x_2 + i y_2) = x_1 - x_2 + i (y_1 - y_2).$$

Умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + i y_1$ и $z_2 = x_2 + i y_2$, так же, как и операции сложения и вычитания, осуществляется по правилам умножения двучленов (многочленов), однако при этом учитывается важнейшее равенство, имеющее вид:

$$i^2 = -1$$

По этой причине

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + i y_1) (x_2 + i y_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = \\ &= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 - y_1 y_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i (x_1 y_2 + i x_2 y_1) . \end{aligned}$$

Комплексно сопряженные числа

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ у которых

действительные части одинаковые, а мнимые части отличаются знаком, называются комплексно сопряжёнными числами.

Произведение комплексно сопряженных чисел есть действительное число:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 \cdot y^2 = x^2 + y^2$$

Деление комплексных чисел

Деление комплексного числа $z_1 = x_1 + i y_1$ на отличное от нуля комплексное число

$z_2 = x_2 + i y_2$ осуществляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + iy_1 x_2 - i^2 y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Деление на ноль запрещено

Пример:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + i}{-1 + 5i} = \frac{(3 + i)(-1 - 5i)}{(-1 + 5i)(-1 - 5i)} = \frac{-3 - 15i - i + 5}{1 + 25} = \frac{2 - 16i}{26} = \frac{1}{13} - i \frac{8}{13}.$$

Возведение в степень комплексного числа

Возведение в степень комплексного числа, записанного в алгебраической форме, выполняется с использованием формул сокращенного умножения.

Для вычисления степени мнимой единицы существуют специальные формулы:

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

Раздел 4. Основные понятия теории вероятностей

Тема 4.1 Случайная величина, её функция распределения

Понятие события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятностей. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей. Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины. Закон распределения случайной величины.

Практические занятия. *Классическое определение вероятностей.*

Методические указания

Прежде чем познакомиться с основными понятиями теории вероятностей следует рассмотреть три типа комбинаций: перестановки, размещения, сочетания. Уяснить для себя, чем отличаются перестановки от размещения, перестановки от сочетания, размещения от сочетания.

По рекомендуемой литературе разобраться в формулах и в решенных комбинаторных задачах. Рассмотрите понятие случайного события и на примерах разберитесь в видах события; невозможные, достоверные, совместные, несовместные, зависимые, независимые.

После этих понятий следует изучить классическое определение вероятности события, и научиться находить вероятность в простейших задачах, используя классическое определение вероятностей.

Из операций над событиями необходимо познакомиться лишь с суммой конечного числа событий.

Изучение теоретического материала следует сопровождать рассмотрением решенных задач по предложенным учебникам, а затем следует ответить на вопросы для самоконтроля.

Случайное событие, связанное с некоторым опытом, является качественной характеристикой опыта. Количественной же характеристикой результата проведенного опыта является случайная величина.

Рассматривая примеры, необходимо усвоить понятие случайной величины, виды случайной величины (дискретной и непрерывной) и их определения. Нужно рассмотреть соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями. Такое соответствие называется законом распределения случайной величины. Закон распределения случайной величины удобно давать в виде таблицы.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется n - факториалом ?
2. Что называется перестановками ? Запишите формулу.
3. Что называется размещениями ? Запишите формулу.
4. Что называется сочетаниями ? Запишите формулу.
5. Что понимается под случайным событием ? Приведите примеры.

6. Какие события называются достоверными? Приведите примеры.
7. Какие события называются невозможными? Приведите примеры.
8. Что понимается под вероятностью события?
9. Дайте классическое определение вероятности события.
10. Какие события называются несовместными, совместными? Приведите примеры.
11. Как формулируется теорема сложения вероятностей?
12. Дайте определение частоты наступления события и объясните от чего она зависит?
13. Какими свойствами обладает вероятность события?
14. Какие события называются независимыми, зависимыми? Приведите примеры.
15. Какая величина называется случайной?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ

Необходимым этапом самостоятельной работы для студентов заочной формы обучения над программным материалом является выполнение контрольной работы по предложенному варианту.

Контрольная работа - это самостоятельная работа студента с литературой, ответы на поставленные вопросы и выполнение конкретных заданий, она должна показать умение студента кратко и четко отвечать на поставленные в теме вопросы, подбирать и использовать необходимые для ответа материалы.

Цель конкретной работы - привить навыки самостоятельного изучения учебного материала, закрепление знаний по изучаемой дисциплине.

Контрольная работа должна быть выполнена в установленные учебным графиком сроки, по правильному варианту и выполнена в соответствии с требованиями.

Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради. Задания необходимо переписывать полностью. Ответы на них должны быть четкими и конкретными, содержать необходимые иллюстрации (схемы, графики, таблицы) или в печатном варианте. Текст набирается шрифтом Times New Romans кегль – 14, интервал - 1,5

Полностью выполненную работу студент должен выслать в техникум для проверки, зарегистрировать в учебной части.

Если работа не зачтена, то студент должен переделать ее и выслать в техникум повторно вместе с первой.

Если студент выполняет не свой вариант, работа возвращается без проверки.

По всем неясным вопросам, которые возникают в процессе изучения материала и выполнения контрольной работы, следует обратиться устно или письменно в техникум к преподавателю данной дисциплины за консультацией.

Студенты, не выполнившие контрольные работы или получившие за них отрицательную оценку (незачет), к сдаче экзамена/зачета не допускаются.

Вариант контрольной работы определяется по последней цифре номера студенческого билета.

Контрольная работа

Вариант 1

1. Найдите производную функции и вычислите:

а) $y = \frac{x}{e^2}, y'(0)$

б) $f(x) = \frac{2}{(3x^2-5)^3}, f'(-1)$

2. Найдите интегралы:

а) $\int (3\sin x + 4x^3 - 1) dx$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

в) $\int_1^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

3. Найти линейную комбинацию заданных матриц:

$$4A - 5B, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 4x + 5y + 6z = 8, \\ 7x + 8y = 2. \end{cases}$$

5. Выполните действия с комплексными числами:

а) $(1 - i) \cdot (-3 + 2i);$

б) $\frac{1+2i}{3-i} + (1-i)^2.$

6. В урне 9 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Вариант 2

1. Найдите производную функции и вычислите:

а)

$$y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}, \quad y' \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

б)

$$S = \sqrt[3]{t^2 + t + 2}, \quad S'(2)$$

2. Найдите интегралы:

а)

$$\int \left(2 - \frac{x}{3} + \frac{5}{1+x^2} \right) dx$$

б)

$$\int_1^3 \sqrt{(3x^2 - 1)^2} x dx$$

в)

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{3 + 2x^3}$$

3. Найти линейную комбинацию заданных матриц:

$$3A + 4B, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases}$$

5. Выполните действия с комплексными числами:

а) $\frac{2+3i}{4-2i} + \frac{1-3i}{2i};$

б) $i^2 + i^3 + i^4 + i^5.$

6. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Вариант 3

1. Найдите производную функции и вычислите:

а)

$$y = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad y'(0)$$

б)

$$y = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x, \quad y' \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

2. Найдите интегралы:

а) $\int \left(5 \frac{3}{\cos^2 x} + 2x^3 \right) dx$

б) $\int x \cdot 2^{x^2} dx$

в) $\int_2^4 \frac{15 x dx}{(x^2 - 1)^3}$

3. Найдите произведение матриц AB и BA , если это возможно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

5. Выполните действия с комплексными числами:

а) $\left(\frac{i^{16} + 3}{i^6 + 3} \right)^5;$

б) $(1 + i)^{10}.$

6. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Берут наудачу 3 учебника. Найдите вероятность того, что, хотя бы 1 из взятых учебников окажется в переплете.

Вариант 4

1. Найдите производную функции и вычислите:

а)

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad f'(2)$$

б)

$$y = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x, \quad f' \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

2. Найдите интегралы:

а)

$$\int \left(5x^4 - \frac{1}{3x} - 4 \right) dx$$

б)

$$\int \frac{\cos x \, dx}{4 + 3 \sin x}$$

в)

$$\int_{2\sqrt{2}}^4 x \sqrt{x^2 - 7} \, dx$$

3. Найдите произведение матриц AB и BA , если это возможно:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21. \end{cases}$$

5. Выполните действия с комплексными числами:

а) $\frac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})};$

б) $(-1+i)^5.$

6. На семинар приехали 6 учёных из Норвегии, 5 из России и 9 из Испании. Каждый учёный подготовил один доклад. Порядок докладов определяется случайным образом. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад учёного из России.

Вариант 5

1. Найдите производную функции и вычислите:

а)

$$y = \frac{1-t}{2t}, \quad y' \left(\frac{1}{2} \right)$$

б)

$$y = e^{\sin 2x}, \quad y' \left(\frac{\pi}{8} \right)$$

2. Найдите интегралы:

а)

$$\int \left(2 - \frac{x}{5} + \frac{5}{x} \right) dx$$

б)

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

в)

$$\int_1^e \frac{\ln x \, dx}{x}$$

3. Найдите произведение матриц AB и BA , если это возможно:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 4x + 5y + 6z = 19, \\ 7x + 8y = 1. \end{cases}$$

5. Выполните действия с комплексными числами:

$$\frac{(1+i)^{28}}{(1-i)^{24} - i \cdot (1+i)^{24}}.$$

6. В партии из 8 деталей имеется 6 стандартных. Найдите вероятность того, что среди 5 взятых наугад деталей 3 стандартных.

Вариант 6

1. Найдите производную функции и вычислите:

а)

$$y = e^{x^2}, \quad y'(0)$$

б)

$$f(x) = 3 \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^3 x, \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

2. Найдите интегралы:

а)

$$\int \left(10x^4 - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2 \right) dx$$

б)

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$$

в)

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^3}$$

3. Найдите произведение матриц AB и BA , если это возможно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8. \end{cases}$$

5. Выполните действия с комплексными числами:

$$(2 - i)^2 \cdot (3 + 4i);$$

$$i^8 + \frac{5+i}{1-3i}.$$

6. В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей: 7 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов придет машина жёлтого цвета с чёрными надписями

Вариант 7

1. Найдите производную функции и вычислите:

а)

$$y = \sin^2 x, \quad y' \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

б)

$$y = \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad y' (3)$$

2. Найдите интегралы:

а)

$$\int (2 \cos x - 3x^2 - 3) dx$$

б)

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 - 5}}$$

в)

$$\int_{-1}^1 \frac{5x dx}{(1-x^2)^3}$$

3. Найдите произведение матриц AB и BA , если это возможно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1, \\ 6x + 5y + 4z = -2, \\ 9x + 8y + 7z = 3. \end{cases}$$

5. Выполните действия с комплексными числами:

а) $\frac{1+3i}{-2+i} \cdot (-2i) + 1;$

б) $\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{160}.$

6. Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 20 рублей, на 10 - по 15 рублей, на 15 - по 10 рублей, на 25 - по 2 рубля и на остальные - ничего. Найдите вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не меньше 10 рублей.

Вариант 8

1. Найдите производную функции и вычислите:

а)

$$y = e^{2x} \cos x, \quad y'(0)$$

б)

$$S = \ln \frac{x}{1-x^4}, \quad S'(2)$$

2. Найдите интегралы:

а)

$$\int \left(\frac{1}{5 \cos^2 x} - \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \right) dx$$

б)

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 5)^4}$$

в)

$$\int_0^1 \frac{6x^2 dx}{1 + 2x^3}$$

3. Найдите произведение матриц AB и BA , если это возможно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -8, \\ 2x + 3y + z = -3, \\ 2x + y + 3z = -1. \end{cases}$$

5. Выполните действия с комплексными числами:

а) $1 - i^5 + i^{10} - i^{15} + \dots + i^{50};$

б) $\frac{3+4i}{i} + \frac{4-i}{3+2i}.$

6. Восемь различных книг расставляются наугад на одной полке. Найдите вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

Вариант 9

1. Найдите производную функции и вычислите:

а) $y = x^2 e^x, \quad y' (1)$

б) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + x, \quad y' \left(\frac{\pi}{4} \right)$

2. Найдите интегралы:

а) $\int (x^7 - 3 \sin x + 2) dx$

б) $\int \cos^4 x \sin x dx$

в) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x + 5}$

3. Найдите произведение матриц AB и BA , если это возможно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10; \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

5. Выполните действия с комплексными числами:

а) $\frac{(2 + 3i)(5 - i)}{2 + i};$

б) $(2i - 1)^4 - (2i + 1)^4.$

6. Бросаются одновременно 2 игральные кости. Найдите вероятность следующего события: сумма выпавших очков равна 8.

Вариант 10

1. Найдите производную функции и вычислите:

а)

$$y = 2 \ln x - \frac{3}{x^2}, \quad y'(-1)$$

б)

$$y = \ln \cos^2 4x, \quad y' \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

2. Найдите интегралы:

а)

$$\int \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x} + 5e^x \right) dx$$

б)

$$\int e^{\cos x} \sin x \, dx$$

в)

$$\int_1^2 \frac{2x^2 + 1}{x} dx$$

3. Найдите произведение матриц AB и BA , если это возможно:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10; \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

5. Выполните действия с комплексными числами:

а) $(1 + 2i)^3 - \frac{4i}{4 - 3i};$

б) $i^3 + i^{13} + i^{23} + \dots + i^{53}.$

6. В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной.

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. М.И. Башмаков Математика. Учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования.- М: Кнорус, 2017.
2. И.И. Баврин , Математика для технических колледжей и техникумов. Учебник и практикум для СПО. – М: Юрайт, 2017.
3. И.Д. Пехлецкий Математика: учебник для студ. образоват. учреждений СПО. - М.: Издательский центр «Академия», 2014.
4. В.С. Щипачев Математика. Учебник и практикум для СПО. – М: Юрайт, 2016.

Дополнительная литература:

1. Математика. Энциклопедия. М.: БСЭ, 2003.
2. Ивашев-Мусатов.О.С. Теория вероятностей и математическая статистик. – М: Юрайт, 2016.
3. М.Я. Выготский Справочник по высшей математике. – М., 2000
4. Математика: Метод. указания и контр. задания для студ.-заоч. образ-х учрежд. СПО - (Минэнерго РФ Учебно-метод. кабинет по горн., нефтян. и энерг. образованию)
5. В.С. Щипачев Основы высшей математики. - М.: Высшая школа, 2001
6. Н.В. Богомолов Практические занятия по математике. М.: Высшая школа, 2002
7. И.П. Натансон Краткий курс вышей математики. С-Пб.: Лань, 2001
8. Я.М. Ерусалимский Дискретная математика. - М.: Вузовская книга, 2001
9. П.Е Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова Высшая математика и упражнения и задачах. Часть 1 и 2. - М.: Высшая школа, 1999
10. В.Н. Калинина, В.Ф. Панкин Математическая статистика.М.: Высшая школа, 2001
11. В.Л. Подольский и др. Сборник задач по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - М.: Высшая школа, 1999
12. Щипачев В.С. Задачи по высшей математике. М.: высшая школа, 1997
13. В.Ф. Бутузов, Н.И. Крутицкая Математический анализ в вопросах и задачах. — М.: Физматлит, 2000
14. М.Я. Выгодский Справочник по высшей математике. М.: Росткнига, 2001

Электронные библиотеки	- Электронно-библиотечная система "Лань" - https://e.lanbook.com/ ; - Электронно-библиотечная система "Iprbookshop" http://www.iprbookshop.ru/6951.html.
------------------------	---

Интернет ресурсы:

1. Высшая математика для заочников. Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.mathprofi.ru/> ;
2. Видео уроки по математике. Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://mirurokov.ru/videouroki-po-matematike-algebra-10-11-klass.html>
3. Лекция 8. Основные сведения о рациональных функциях. Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.youtube.com/watch?v=1546Q24djU4&feature=channel>
4. Геометрический смысл производной. Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.youtube.com/watch?v=TxFmRLiSpKo>
5. Лекция 1.Первообразная и неопределенный интеграл. Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.youtube.com/watch?v=PbbyP8oEv-g>
6. Лекция 5.Интегрирование по частям. Интернет-ресурс. Режим ввода: http://www.youtube.com/watch?v=2N-1jQ_T798&feature=channel
7. Лекция 2.Таблица основных интегралов. Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.youtube.com/watch?v=3qGZQW36M8k&feature=channel>
8. Лекция 3. Непосредственное интегрирование. Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.youtube.com/watch?v=7lezxG4ATcA&feature=channel>
9. Лекция 4.Метод подстановки. Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.youtube.com/watch?v=s-FDv3K1KHU&feature=channel>
10. Лекция 12.Понятие определенного интеграла. Интернет-ресурс. Режим ввода: http://www.youtube.com/watch?v=dU_FMq_lss0&feature=channel
11. Гиперметод умножения. Интернет-ресурс. Режим ввода: http://www.youtube.com/watch?v=wg_AIYBB0dg&feature=related
12. Теория вероятности. Интернет-ресурс. Режим ввода: http://www.youtube.com/watch?v=C_7clQcJP-c
13. Проблема Монти Холла. Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.youtube.com/watch?v=3LyUi13SUyg&feature=related>
14. Парадокс Монти Холла (из фильма «21»). Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.youtube.com/watch?v=7L52m03AmEI&feature=related>
15. Лекция 6. Комплексные числа (часть 1). Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.youtube.com/watch?v=dZPRzB1Nj08>
16. Комплексные числа и фракталы. Часть 1. Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.youtube.com/watch?v=Cfy0CXpR9Lo>
17. Теория фракталов. Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.youtube.com/watch?v=uis7Hg2gSNo&feature=related>
18. Fractal Zoom Mandelbrot Corner. Интернет-ресурс. Режим ввода: http://www.youtube.com/watch?v=G_GBwuYuOOs&feature=fvw
19. Mandelbrot, Much bigger than the universe! deep zoom 2^{2316} . Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.youtube.com/watch?v=2tRdLD6vh3g&feature=related>
20. Exponenta.ru Компания Softline. Образовательный математический сайт. Материалы для студентов: задачи с решениями, справочник по математике, электронные консультации. Интернет-ресурс. Режим ввода: <http://www.exponenta.ru> .